Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2023/2024
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

10. Übungsblatt (18. Dezember 2023)

Aufgabe 29: Potenzgesetze [5 Punkte]

Beweisen Sie die nachfolgenden Rechenregeln für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ unter Verwendung der folgenden Definitionen und Regeln aus der Vorlesung:

1. $e^x := E(x)$
2. $\ln x$ ist die Umkehrfunktion von e^x, d. h. $\ln e^x = x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln x} = x$ für $x > 0$
3. $a^x := e^{x \ln a}$
4. $E(0) = 1$
5. $E(x)\,E(-x) = 1$

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

d) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

Aufgabe 30: Taylorpolynome der Sinusfunktion [10 Punkte]

a) Die Taylorpolynome mit Grad 3 und 5 der Sinusfunktion lauten $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ und $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Ermitteln Sie die Nullstellen und die Extremalstellen dieser Polynome und skizzieren Sie sie!

Hinweise:

- Wenn das Polynom in einer Gleichung der Gestalt $P(x) = 0$ nur ungeradzahlige Potenzen von x enthält, kann der Grad durch Ausklammern von x um eins reduziert werden.
- Wenn das Polynom nur geradzahlige Potenzen von x enthält, kann der Grad durch die Substitution $u := x^2$ halbiert werden.

b) Da die Taylorpolynome der Sinusfunktion keine geradzahligen Potenzen von x enthalten, ist $T_4(x) = T_3(x)$ und $T_6(x) = T_5(x)$. Deshalb wird die Abweichung dieser Polynome von der Sinusfunktion durch die Restglieder $R_4(x, \xi)$ und $R_6(x, \xi)$ bestimmt.

Geben Sie diese Restglieder an und schätzen Sie Ihren Betrag für $|x| \leq 1$ nach oben ab!

Welche Aussagen können damit über die Genauigkeit der beiden Polynome (Anzahl korrekter Nachkommastellen) in diesem Bereich gemacht werden?

Aufgabe 31: Ableitung der Umkehrfunktion [5 Punkte]

Die Funktion $\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\sin x$, wenn man diese auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ einschränkt, d. h. es gilt: $\sin \arcsin x = x$.

a) Wie lautet der Definitions- und Wertebereich der Funktion $\arcsin x$? Skizzieren Sie die Funktion!

b) Zeigen Sie durch Anwendung des entsprechenden Satzes der Vorlesung: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$!
(Hinweis zur Vereinfachung des resultierenden Ausdrucks: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.)

Aufgabe 32: Regeln von Bernoulli und de l'Hospital [10 Punkte]

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 1}$