Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studienbereich Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2023/2024
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

11. Übungsblatt (12. Januar 2024)

Aufgabe 33: Integrierbarkeit [10 Punkte]

Beweisen Sie direkt mit Hilfe der Integraldefinition und/oder geeigneter Sätze der Vorlesung:

a) Für $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k, & \text{wenn } x = \frac{1}{k} \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$ gilt: $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert nicht.

b) Für $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2^k}, & \text{wenn } x = \frac{1}{k} \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$ gilt: $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Hinweis:
Betrachten Sie die Riemannschen Summen $S(f, P, Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ und schätzen Sie diese nach oben ab!
Verwenden Sie hierfür einerseits $\Delta x_i \leq \Delta(P)$ und andererseits $f(\xi_i) = 0$ oder $f(\xi_i) = \frac{1}{2^k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$!

Aufgabe 34: Stückweise Integration [10 Punkte]

a) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_1^n \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$, indem Sie den Integrationsbereich geeignet zerlegen und die Funktion stückweise integrieren!

b) Berechnen Sie auf ähnliche Weise das Integral $\int\limits_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$, indem Sie das Vorlesungsbeispiel $\int\limits_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2}$ sowie Rechenregeln für Integrale verwenden!